Anales PANEL'81/12 JAIIO
Sociedad Argentina de informática
e Investigación Operativa. Buenos Aires, 1981

ECUACION GENERAL DE MOVIMIENTO DE VIGAS: ESTABILIDAD NUMERICA DE SU SIMULACION EN DIFERENCIAS FINITAS

C. P. Filipich

Departamento de Ingeniería Universidad Nacional del Sur
Departamento de Construcciones Universidad Tecnológica Nacional
Bahía Blanca - Argentina

INTRODUCCION

Ingenieros y Físicos tienen frecuentemente la necesidad de conocer la respuesta transitoria en el problema de flexión de vigas prismáticas de sección cualquiera, sometidas a la acción de cargas variables con la longitud y con el tiempo. Para ello cuentan, especialmente, con tres ecuaciones diferenciales de movimiento, que gobiernan las vibraciones transversales de barras elásticas uniformes, que son: la ecuación elemental, la ecuación de Rayleigh y la ecuación general, denominada de Timoshenko (1). En la deducción de esta última se tiene en cuenta no sólo la inercia rotatoria -como sucede en la de Rayleigh-, sino también la deformación debida al esfuerzo de corte.

Ahora bien: el efecto de cargas concentradas, aplicadas súbitamente, no es descrito con exactitud por la ecuación elemental, pues el desarrollo de Fourier de las cargas concentradas que contiene armónicos de longitud de onda infinitésima y el carácter parabólico de esta ecuación, producirán velocidades de fase infinitas (2); por lo tanto, perturbaciones baja longitud de onda no serán reproducidas con precisión por la ecuación elemental.

Si definimos como fenómeno de "dispersión" la relación entre velocidad de fase y longitud de onda en barras infinitamente largas (+), y comparamos valores de dispersión calculados exactamente por la teoría elástica para barras de sección

(+) Este fenómeno se da en forma más complicada en barras vinculadas.

circular, con los obtenidos por las ecuaciones de Rayleigh y elemental, se observa una fuerte discrepancia para valores altos de longitud de onda. Sin embargo, en la primera no se produce una trasmisión infinitamente rápida de perturbaciones como señalamos para la segunda. En cambio, las curvas de dispersión para el modo flexional de una barra circular de la ecuación de Timoshenko y la exacta, coinciden satisfactoriamente para un ancho espectro de longitudes de onda, por lo que podrá presumirse que esta ecuación general que nos ocupa, dará resultados precisos para barras con otras formas de sección transversal (3).

Hemos así justificado sucintamente la importancia de la ecuación general de movimiento en problemas prácticos y de allí su uso divulgado; una de las formas más simples de afrontar un estudio real, es a través de la simulación de la ecuación diferencial, por medio de una aproximación en diferencias finitas.

Sabemos que simulación en diferencias finitas de la ecuación Timoshenko, trae aparejado, como acaece en todo problema de condiciones iniciales, el estudio de lo que denominamos estabilidad numérica, es decir, garantizar que el crecimiento en el tiempo de los errores introducidos en los datos para $t = 0$, no invaliden los resultados. En este trabajo se calcula el límite o zona de estabilidad de una viga Timoshenko simplemente apoyada, a través de unos parámetros que relacionan los intervalos temporal y espacial de una malla rectangular uniformemente espaciada, con la que cubriremos el dominio de validez de la solución. Se utiliza un análisis matricial de estabilidad.

Los parámetros de estabilidad se han buscado de manera tal que sean semejantes al que se utiliza en el problema de estabilidad en la simulación de la ecuación elemental de movimiento (2) (4) (5); pero en nuestro caso no surgen sólo en función de las constantes físico-geométricas de la viga y del número de puntos interiores en que dividimos la misma, sino también de la media absoluta del intervalo espacial o temporal, dependiendo del parámetro adoptado. Tal cosa no sucede con la ecuación elemental.

Dos métodos se utilizan para acotar el parámetro de estabilidad, y ambos se fundamentan en la filosofía de introducir vectores ficticios de desplazamiento, para con ello disminuir el número de niveles de la ecuación matricial original que gobierna el proceso en el tiempo. Transformamos así el estudio inicial en un problema lineal de autovalores con matrices ampliadas, que a su vez equivalen a otro no lineal de autovalores con una matriz, función de las originales, que es posible resolver exactamente.

El primero de los métodos desarrollados permitirá llegar más directamente a la epxresión del límite buscado.

Se presentan un esquema explícito y otro implícito.

Se calculan, por simple pasaje al límite, los parámteros de estabilidad de las ecuaciones de Rayleigh y de la elemental.

ECUACION GENERAL DE MOVIMIENTO

La ecuación diferencial ordinaria que gobierna el problema de vibraciones transversales de una viga elástica prismática de sección constante con al menos un eje de simetría, de longitud L, teniendo en cuenta en su deducción la inercia rotatoria y la deformación por corte, y vibrando en el plano de simetría, es (1) :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + a\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{p}{EI} + \frac{1}{qGA}\left(\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) \qquad (1)$$

siendo:

$$\rho A c^2 = EI;\ qEG.b = \rho(qG+E)\ y\ qEG.a = \rho^2 \qquad (2)$$

donde hemos denominado como:

u = u(x,t) al desplazamiento transversal al eje de la pieza, donde x($0 \leq x \leq L$) y t($t > 0$) son las coordenadas espacial y temporal respectivamente.

E - módulo de Young

G - módulo de elasticidad transversal: $\frac{E}{2(1+\nu)}$

ν - coeficiente de Poisson

ρ - masa específica

A - área de la sección transversal

I - momento de inercia de la sección

$\frac{1}{q}$ - factor de corte

p - p(x,t) - carga aplicada

Definiremos como condiciones o datos iniciales a los siguientes valores para t = 0:

$$u(x,0) = f_1(x) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,0) = f_3(x) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x,0) = f_4(x) \qquad (6)$$

donde f_1, f_2, f_3 y f_4 son funciones conocidas de x.

Asimismo, las condiciones de borde de una viga Timoshenko simplemente apoyada y sin momentos aplicados a sus extremos, son:

$$u(0,t) = 0 \qquad (7)$$

$$\mu(0,t) = 0 \qquad (8)$$

$$u(L,t) = 0 \qquad (9)$$

$$\mu(L,t) = 0 \qquad (10)$$

siendo $\mu(x,t)$ el momento flector.

SIMULACION DEL PROBLEMA EN DIFERENCIAS FINITAS

Para utilizar una aproximación en diferencias finitas, espaciamos uniformemente el dominio de solución en sentido x y en sentido t , tal que:

$$x_i = i.h \quad (i=-1,0,1,2\ldots M, M+1, M+2) \tag{11}$$

$$t_j = j.k \quad (j=-2,-1,0,1,2,\ldots) \tag{12}$$

donde h y k son los intervalos espacial y temporal respectivamente, siendo M el número de puntos interiores en que dividimos la viga, o sea:

$$M.h = L \tag{13}$$

Denominaremos, además, como:

$$p_j^i = p(x_i, t_j) \equiv p(ih, jk) \tag{14}$$

y

$$u_j^i = u(x_i, t_j) \equiv u(ih, jk) \tag{15}$$

y definiremos como U_j^i la solución para la aproximación en diferencias, correspondiente al valor teórico u_j^i, o sea, que tendremos:

$$U_j^i = u_j^i - e \tag{16}$$

denominando con e al error de discretización.

Como observamos en (11) y (12), deberemos hacer uso durante el cómputo del proceso, de los siguientes puntos "ficticios":

$i = -1$ e $i = M + 2$ en sentido x

y $j = -2$ y $j = -1$ en sentido t.

Para pasar a la forma vectorial de la ecuación en cuestión, debemos desarrollar en diferencias finitas las derivadas que aparecen en (1) y las condiciones de borde (7), (8), (9) y (10). Utilizaremos, tanto para el esquema explícito como para el implícito, diferencia central, pero debemos tener en cuenta que la discretización de las condiciones de borde, al tratarse de una ecuación donde se han considerado las deformaciones por flexión y por corte, incidirá sobre el término independiente, es decir, que el vector de cargas será modificado al pasar a diferencias finitas.

Veamos, entonces, la expresión, en diferencia central, de las condiciones de borde (7), (8), (9) y (10) respectivamente:

$$U_j^o = 0 \tag{17}$$

$$U_j^{-1} = -\left(U_j^1 + q\frac{h^2}{GA} \cdot p_j^0 \right) \tag{18}$$

$$U_j^{M+1} = 0 \tag{19}$$

$$U_j^{M+2} = -\left(U_j^M + q\frac{h^2}{GA} \cdot p_j^{M+1} \right) \tag{20}$$

Así podremos definir los siguientes vectores:

$$\{V\}_j = \{U_j^1 \; U_j^2 \cdots U_j^M\}^T \tag{21}$$

$$EI\,\{\pi\}_j = \{p_j^{*1} \; p_j^2 \cdots p_j^{M-1} \; p_j^{*M}\}^T \tag{22}$$

donde:

$$p_j^{*1} = p_j^1 + \left(q\frac{EI}{GA} \cdot h^2\right) p_j^0 \tag{23}$$

$$p_j^{*M} = p_j^M + \left(q\frac{EI}{GA} \cdot h^2\right) p_j^{M+1} \tag{24}$$

FORMA VECTORIAL DEL PROCESO

Luego de hacer el pasaje a diferencias finitas de la ecuación (1) y de las condiciones de borde, llegamos al siguiente esquema de recurrencia en el tiempo de cinco niveles, que nos permitirá, numéricamente, predecir la respuesta transitoria de una viga bajo el efecto de una carga $p(x, t)$:

$$\{V\}_{j+2} = [A]\{V\}_{j+1} + [B]\{V\}_j + [A]\{V\}_{j-1} - [I]\{V\}_{j-2} + [K]\{\pi\}_j \tag{25}$$

donde las matrices [A] , [B] y [K] , de orden M, dependerán del esquema explícito o implícito que adoptemos, y que describiremos en cada caso. [I] es la matriz unitaria.

Por otro lado, debemos indicar que en el estudio de propagación de errores, el vector de cargas no tiene influencia, razón por la cual de aquí en adelante no será tenido en cuenta.

REDUCCION DEL ESQUEMA (1er METODO)

Definimos un vector ficticio de desplazamiento $\{W\}_m$ de orden (3M), como:

$$\{W\}_m = \begin{Bmatrix} \{V\}_{m+1} \\ \{V\}_m \\ \{V\}_{m-1} \end{Bmatrix} \qquad (26)$$

Introduciendo (26) en la forma vectorial (25), sin consideración de cargas, llegamos al siguiente esquema equivalente:

$$[Q]\{W\}_{j+1} = [P]\{W\}_j - [Q]\{W\}_{j-1} \qquad (27)$$

o el análogo:

$$\{W\}_{j+1} = [Q]^{-1}[P]\{W\}_j - [I]\{W\}_{j-1} \qquad (28)$$

Observamos que el esquema vectorial (28), de tres niveles, es formalmente idéntico al correspondiente a la simulación de la ecuación elemental de movimiento de vigas.

Hemos denominado en (27) y (28) como matrices [P] y [Q], de orden (3M), a las siguientes:

$$[P] = \left[\begin{array}{c|c|c} [\alpha] & [B]+2[I] & [\alpha] \\ \hline [\beta] & [0] & [\beta] \\ \hline [\gamma] & [0] & [\gamma] \end{array}\right] \qquad (29)$$

$$[Q] = \left[\begin{array}{c|c|c} [I] & [\alpha]-[A] & [I] \\ \hline [0] & [\beta] & [0] \\ \hline [0] & [\gamma] & [0] \end{array}\right] \qquad (30)$$

donde todas las submatrices de $[P]$ y $[Q]$ son de orden M y $[\alpha]$, $[\beta]$ y $[\gamma]$ son matrices arbitrarias, pero tales que $[Q]$ no sea singular.

Ahora bien: la condición para que el esquema (28) sea estable (y por lo tanto también el (25)), es que los autovalores de la matriz $[Q]^{-1}\cdot[P]$ estén acotados por las siguientes desigualdades: (5)

$$-2 < \varepsilon(Q^{-1}P) \leq 2 \qquad (+) \tag{31}$$

De acuerdo con la teoría de autovalores, deberá ser:

$$([Q]^{-1}[P] - \varepsilon(Q^{-1}P)[I])\{x\} = 0 \tag{32}$$

que equivale a:

$$([P] - \varepsilon(Q^{-1}P)[Q])\{x\} = 0 \tag{33}$$

Hemos denominado como $\{x\}$ a los autovectores del problema, son vectores de orden (3M), o sea, que podemos escribirlos como:

$$\{x\} = \{\{x_1\} \vdots \{x_2\} \vdots \{x_3\}\}^T \tag{34}$$

siendo los vectores $\{x_i\}$ de orden M:

$$\{x_i\} = \{x_{i1} \ x_{i2} \ \ldots \ x_{iM}\}^T \quad (i = 1,2,3) \tag{35}$$

Expandiendo la ecuación vectorial (33) de acuerdo a (34), podemos escribir -denominando a ε como $\varepsilon(Q^{-1}P)$ - que:

$$([\alpha] - \varepsilon[I])\{x_1\} + ([B] + 2[I] - \varepsilon[\alpha] + \varepsilon[A])\{x_2\} + ([\alpha] - \varepsilon[I])\{x_3\} \tag{36}$$

$$[\beta]\{x_1\} - \varepsilon[\beta]\{x_2\} + [\beta]\{x_3\} = 0 \tag{37}$$

$$[\gamma]\{x_1\} - \varepsilon[\gamma]\{x_2\} + [\gamma]\{x_3\} = 0 \tag{38}$$

(+) Los autovalores de cualquier matriz $[R]$ serán indicados por medio de una letra minúscula griega, de las siguientes formas equivalentes: $\varepsilon(R)$ o $\lambda(R)$ o $\delta(R)$, etc.

De la expresión (37) o (38), obtenemos:

$$\{X_1\} + \{X_B\} - \mathcal{E}\{X_2\} = 0 \tag{39}$$

que, reemplazada en la (36), nos permite deducir:

$$\Big((\mathcal{E}^2-2)[I] - \mathcal{E}.[A] - [B]\Big)\{X_2\} = 0 \tag{40}$$

Hemos conducido así nuestro problema lineal inicial de autovalores (33), al equivalente dado por (40), que no es lineal. Sin embargo, el orden de las matrices y vectores es M, mientras que el correspondiente a (33) es de orden (3M). Señalemos también que la expresión de las matrices $[\alpha]$, $[\beta]$ y $[\gamma]$ no hacen a la esencia del problema, ya que no interviene en la resolución del mismo.

La ecuación característica correspondiente a (40), será entonces:

$$\big|[E]\big| \equiv \big|(\mathcal{E}^2-2)[I] - \mathcal{E}[A] - [B]\big| = 0 \tag{41}$$

Para el esquema explícito e implícito que describiremos más adelante, la matriz [E] es pentadiagonal y será el cuadrado de una matriz tridiagonal (+), por lo que la expresión de sus autovalores $\lambda_i(E)$ es sencillo de hallar [6]. La forma específica se presentará con cada esquema. Los autovalores $\lambda_i(E)$ será función de 2º grado en $\mathcal{E}$ como podemos ver en (41).

Ahora bien: por la teoría de determinantes, sabemos que la ecuación característica (41) puede escribirse como:

$$\big|[E]\big| = \prod_{i=1}^{M} \lambda_i(E) = 0 \tag{42}$$

Para que (42) se satisfaga, al menos algún $\lambda_i(E)$ debe anularse. Por medio de esta condición encontraremos los autovalores $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(Q^{-1}P)$ como raíces de una ecuación cuadrática. Por lo tanto, con la condición de estabilidad (31), limitamos la zona dentro de la cual el esquema será estable.

NIVELES MULTIPLES (2º Método)

Richtmyer[7] desarrolla un método matricial para el estudio de la estabilidad, utilizando una matriz equivalente y que nosotros aplicaremos al esquema (25) de la

---

(+) Sucede esto debido a que tenemos una viga simplemente apoyada. Si tuviéramos otras condiciones de borde, el problema del análisis matricial de la estabilidaddebería abordarse a través de métodos aproximados. Esto puede verse para la viga elemental con cualquier condición de borde en la Ref. (5).

ecuación general de movimiento. Para ello definimos un vector $\{Y\}_m$ de orden (4M) de la siguiente forma:

$$\{Y\}_m = \{\{V\}_{m+1} \vdots \{V\}_m \vdots \{V\}_{m-1} \vdots \{V\}_{m-2}\}^T \tag{43}$$

Introduciéndolo en la forma vectorial (25) de cinco niveles, se reduce a una forma equivalente de sólo dos niveles:

$$\{Y\}_{j+1} = [R]\{Y\}_j \tag{44}$$

donde $[R]$ es la matriz de equivalencia. Observamos que el esquema (44) es formalmente idéntico a los que surgen de la simulación de ecuaciones parabólicas de 2º orden. La matriz $[R]$ de orden (4M) vale:

$$[R] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} [A] & [B] & [A] & [I] \\ \hline [I] & [0] & [0] & [0] \\ \hline [0] & [I] & [0] & [0] \\ \hline [0] & [0] & [I] & [0] \end{array}\right] \tag{45}$$

Para que el esquema (44) (y por lo tanto el (25)) sea estable, debe cumplirse que:

$$|\delta_i(R)| \leq 1 \qquad (i = 1, 2 \dots 4M) \tag{46}$$

Denominando como δ a $\delta(R)$, y de acuerdo con la teoría de matrices, podemos escribir:

$$([R] - \delta[I])\{y\} = 0 \tag{47}$$

que es un problema lineal de valores propios, donde:

$$\{y\} = \{\{y_1\} \vdots \{y_2\} \vdots \{y_3\} \vdots \{y_4\}\}^T \tag{48}$$

El vector $\{y\}$ de orden (4M) indica los autovectores del problema (47). Cada vector $\{y_i\}$ es de orden M:

$$\{y_i\} = \{y_{i1}\ y_{i2}\ \cdots\ y_{iM}\}^T \qquad (i=1,2,3,4) \tag{49}$$

Guderley [8] indica cómo puede pasarse de un problema lineal (47) a uno no lineal equivalente, que nos permitirá hallar los δ. Para ello deberá cumplirse:

$$\left(\frac{1+\delta^4}{\delta^2}[I] - \frac{\delta+\delta^3}{\delta^2}[A] - [B]\right)\{y_1\} = 0 \tag{50}$$

Pero es fácil observar que si denominamos como:

$$\varepsilon = \frac{1+\delta^2}{\delta} \qquad (\delta \equiv \delta(R)) \tag{51}$$

La ecuación (44) es idéntica a la (40), que fue hallada por medio del 1er. método. Una vez calculadas las expresiones de ε, sólo se deberá resolver la ecuación (51) de 2° grado en δ e imponer la condición (46), que garantiza la estabilidad del proceso numérico.

Vale la pena, sin embargo, hacer una pequeña ampliación respecto a la búsqueda de los δ, que nos confirmará por qué es más directo el 1er método expuesto. En efecto: de la expresión (51), observamos que:

$$|\varepsilon| = \frac{1+\delta^2}{|\delta|} \tag{52}$$

Entonces, según (52), se deduce que debería ser $|\varepsilon| \geq 2$, que es justamente lo contrario a lo expresado por las desigualdades (31); la contradicción proviene de suponer que los valores de δ son reales. Por otro lado, de (51) obtenemos:

$$2\delta = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2-4} \tag{53}$$

Aplicando (46):

$$|\delta| = \frac{1}{2}\left|\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2-4}\right| \leq 1 \tag{54}$$

Admitir que los δ son reales es admitir: $\varepsilon^2 \geq 4 \ (|\varepsilon| \geq 2)$, pero si $\varepsilon = |\varepsilon| > 0$ o $\varepsilon = -|\varepsilon| < 0$, la condición (54) más desfavorable es para ambos casos:

$$|\varepsilon| + \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \leq 2 \tag{55}$$

que, por lo tanto, es imposible de satisfacer. Luego, deducimos que la única condición posible es:

$$|\varepsilon| < 2 \tag{56}$$

que no es más que la (31); entonces los autovalores de R serán imaginarios y siempre:

$$|\delta| = 1 \tag{57}$$

con lo cual (57) o (56) garantizan la estabilidad numérica del proceso, en coincidencia con lo hallado por el 1er Método.

UN ESQUEMA EXPLICITO

Utilizando una aproximación en diferencias finitas central para simular la ecuación (1) y las condiciones de borde de una viga simplemente apoyada, y definiendo previamente los siguientes parámetros de estabilidad:

$$r = \left(\frac{k.c}{h^2}\right)^2 \tag{58}$$

$$w = \left(\frac{h}{c}\right)^2 \quad (+) \tag{59}$$

llegamos a que la forma matricial (25) es explícita (9)(10) y las matrices [A] y [B] valen en este caso:

$$[A] = \frac{rw}{2}[a_{ij}] \tag{60}$$

matriz banda tridiagonal de orden M, donde:

$$a_{ii} = \left(\frac{4a}{rw} - 2b - w\right) \quad (i = 1, 2 \ldots M) \tag{61}$$

(+) No son necesariamente los únicos parámetros, pues es posible definir $\sqrt{r}$ y $(\sqrt{r}.w) = k/c$. Los parámetros r o $\sqrt{r}$ son los utilizados en el problema de estabilidad de la ecuación elemental.

$$a_{i(i+1)} = a_{i(i-1)} = a_{12} = a_{M(M-1)} = b \quad (i=2,3 \ldots M-1)$$ (62)

y

$$[B] = \frac{rw}{2} [b_{ij}]$$ (63)

matriz banda pentadiagonal de orden M, donde:

$$b_{ii} = (2w + 4b - \frac{6a}{w} - 6rw) \quad (i=2,3, \ldots M-1)$$ (64)

$$b_{11} = b_{MM} = b_{ii} + r.w \quad (i=2,3, \ldots M-1)$$ (65)

$$b_{i(i+1)} = b_{i(i-1)} = b_{12} = b_{M(M-1)} = 4r.w - 2b \quad (i=2,3 \ldots M-1)$$ (66)

$$b_{i(i+2)} = b_{i(i-2)} = b_{13} = b_{M(M-2)} = b_{24} = b_{(M-1)(M-3)} = -rw \quad (i=3,4 \ldots M-2)$$ (67)

Los a_{ij} y b_{ij} no especificados son nulos.

De esta manera, de la ecuación característica (41) deducimos que:

$$\lambda_i(E) = \mathcal{E}^2 - (4 - m_i)\mathcal{E} + [4 - 2m_i + \frac{4}{2}(rwz_i)^2]$$ (68)

siendo:

$$m_i = \frac{rw}{2}(2bz_i + w)$$ (69)

$$z_i = 1 + \cos \frac{i\pi}{M+1}$$ (70)

De la condición de nulidad de algún λ_i(E), ecuación (42), encontramos:

$$2\mathcal{E}_j \equiv 2\mathcal{E}_j(Q^{-1}P) = 4 - m_i \pm \frac{rw}{2}[4(b^2 - 4a)z_i^2 + 4bwz_i + w^2]^{1/2}$$
$$(i=1,2 \ldots M) \quad (j=1,2 \ldots 2M)$$ (71)

De la condición de estabilidad (31), y observando que para todo i se cumple:

$$m_i \geq \frac{rw}{2}\left[4(b^2-4a)z_i^2+4bwz_i+w^2\right]^{1/2} > 0 \tag{72}$$

vemos que para que el esquema numérico sea estable, debe ser:

$$r < \frac{1}{2wz_i^2}\left[2bz_i+w+\sqrt{4(b^2-4a)z_i^2+4bwz_i+w^2}\,\right] \tag{73}$$

Hemos así acotado para la ecuación Timoshenko, el mismo parámetro de estabilidad que se utiliza para la ecuación elemental; sin embargo, deducimos que, fijados el número de puntos interiores M y la longitud L de la viga, en realidad estamos acotando solamente el intervalo k de tiempo; esta restricción no aparecía en la ecuación elemental.

Por otro lado, como casos particulares deduzcamos la cota de estabilidad para la ecuación de Rayleigh ($a = 0$, $b = \rho/E$) y para la ecuación elemental ($a = b = 0$) por simple pasaje al límite de la expresión (73):

Ecuación de Rayleigh

$$r_R < \frac{2bz_i+w}{wz_i^2} \tag{74}$$

Ecuación Elemental

$$r_E < \frac{1}{z_i^2} \tag{75}$$

Este último valor coincide con los hallados en las referencias (4) y (5).

UN ESQUEMA IMPLICITO

Aplicando a la ecuación (1) una aproximación en diferencias finitas central, pero promediando en el tiempo las derivadas espaciales, tal como sigue:

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^i \sim \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{j-1}^i + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{j+1}^i\right] \tag{76}$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_j^i \sim \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{j-1}^i + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{j+1}^i\right] \tag{77}$$

obtenemos un esquema implícito (9))10), es decir, que se deberá resolver un sistema lineal de ecuaciones por cada línea j-ésima de tiempo. Además, mantenemos las aproximaciones (17), (18), (19) y (20) para las condiciones de borde. De esta forma, llegamos a que en la forma matricial (25) es:

$$[A] = [C]^{-1}[S] \tag{78}$$

$$[B] = [C]^{-1}[T] \tag{79}$$

siendo

$$[C] = \frac{rw}{2}[c_{ij}] \tag{80}$$

una matriz banda tridiagonal de orden M, donde:

$$c_{ii} = b + \frac{2}{rw} \quad (i = 1,2 \ldots M) \tag{81}$$

$$c_{i(i+1)} = c_{i(i-1)} = c_{12} = c_{M(M+1)} = -\frac{b}{2} \quad (i = 2,3 \ldots M-1) \tag{82}$$

También:

$$[S] = \frac{rw}{2}[s_{ij}] \tag{83}$$

donde $[S]$ es una matriz banda pentadiagonal de orden M y:

$$s_{ii} = \left(\frac{4a}{rw} + 2b - w - 3rw\right) \quad (i = 2,3 \ldots M-1) \tag{84}$$

$$s_{11} = s_{MM} = s_{ii} + \frac{rw}{2} \quad (i = 2,3 \ldots M-1) \tag{85}$$

$$s_{i(i+1)} = s_{i(i-1)} = s_{12} = s_{M(M-1)} = 2rw - b \quad (i = 2,3 \ldots M-1) \tag{86}$$

$$s_{i(i+2)} = s_{i(i-2)} = s_{13} = s_{M(M-2)} = s_{24} = s_{(M-1)(M-3)} = -\frac{rW}{2} \quad (i=3,4\ldots M-2) \tag{87}$$

Además:

$$[T] = \frac{rW}{2}[t_{ij}] \tag{88}$$

es una matriz banda tridiagonal de orden M, donde:

$$t_{ii} = \left(2W - 2b - \frac{6a}{rW}\right) \quad (i=1,2\ldots M) \tag{89}$$

$$t_{i(i+1)} = t_{i(i-1)} = t_{12} = t_{M(M-1)} = b \quad (i=2,3\ldots M-1) \tag{90}$$

Los valores de c_{ij}, s_{ij} y t_{ij} no especificados, son nulos. De esta forma, la ecuación (40) puede escribirse así:

$$\left((\varepsilon^2 - 2)[I] - \varepsilon[C]^{-1}[S] - [C]^{-1}[T]\right)\{x_2\} = 0 \tag{91}$$

que equivale a la siguiente ecuación característica:

$$|[E]| \equiv |(\varepsilon^2 - 2)[C] - \varepsilon[S] - [T]| = 0 \tag{92}$$

Nuevamente, como ocurría con el esquema explícito, la matriz $[E]$ es una matriz pentadiagonal, y es el cuadrado de una matriz tridiagonal, cuyos autovalores son fáciles de hallar (6).

Entonces, debe ser:

$$|[E]| = \prod_{i=1}^{M} \lambda_i(E) = 0 \tag{93}$$

De (93) observamos que algún $\lambda_i(E)$ debe anularse y ello nos conduce a:

$$0 = [a + rwbz_i].\varepsilon^2 + [2(rwz_i)^2 - 2rwbz_i + rw^2 - 4a].\varepsilon + [4a - 2rw^2] \tag{94}$$

donde r, w y z_i han sido definidos en (58), (59) y (70) respectivamente.

De la condición (31) obtenemos la condición de estabilidad de la ecuación Timoshenko para el esquema implícito adoptado. No nos detenemos a analizar la cota del caso general, pues dependerá de los valores absolutos de los intervalos en relación con las constantes físico-geométricas a, b y c. Como verificación necesaria, analicemos el caso de la ecuación elemental (a = b = 0). Entonces, de (94):

$$\varepsilon = \frac{2}{1+2rz_i^2} \tag{95}$$

De las condiciones (31), se observa que deberá ser simultáneamente:

$$rz_i^2 \geq 0 \tag{96}$$

$$1+rz_i^2 \geq 0 \tag{97}$$

por lo que se satisfacen para todo valor de r, en coincidencia con lo hallado en la Referencia (5).

AGRADECIMIENTO

El autor desea expresar su gratitud a los Profesores J.A.Reyes y R.E.Rossi, por su desinteresada colaboración con respecto al trabajo y sus valiosas sugerencias en lo referente al tema del mismo.

R E F E R E N C I A S

1. Y. C. Fung, Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, 1968.

2. S. H. Crandall, "Numerical Treatmente of a four order parabolic partial differential equation", J. Assoc. for Comp. Mach. 111-118 (1953).

3. W. A. Green, "Dispersion Relations for Elastic Waves in Bars", Progress in Solid Mechanics, Vol. I, Edited by I. N. Sneddon and R-Hill. North-Holland Publishing Company, Amsterdan, 225-261 (1960).

4. L. Collatz, "Zur Stabilitat Differenzenverfahrens bei der Stabschwingungsglichung", Z. angew. Math. Mech. Bd. 31 Nr. 11/12,392-393 (1951).

5. C. P. Filipich, "Análisis de la Estabilidad Numérica para la Ecuación Elemental de Movimiento de Vigas". Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, Argentina (1979).

6. R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis. Mc Graw-Hill, New York, 1960.

7. R. D. Richtmyer, Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, Inc. New York, 1957.

8. K. G. Guderley, "On Non Linear Eigenvalue Problems for Matrices", J. Soc. Indust. and Appl. Math. 6, 335-353 (1958).

9. W. F. Ames, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Barnes and Noble, Inc. New York, 1969.

10. F. B. Hildebrand, Finite-Difference Equations and Simulations, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.